

РУКОПИСИ ПРВИХ УНИВЕРЗИТЕТСКИХ ПРЕДАВАЊА МИЛУТИНА МИЛАНКОВИЋА

НАДЕЖДА ПЕЈОВИЋ, ЖАРКО МИЈАЈЛОВИЋ,
САША МАЛКОВ и НЕНАД МИТИЋ

*Математички факултет Универзитета у Београду, Студентски трг 16,
11000 Београд*

E-mail: nada@matf.bg.ac.rs, zarko.mijajlovic@gmail.com,
smalkov@matf.bg.ac.rs, nenad@matf.bg.ac.rs

Резиме: У богатој научној и стручној заоставштини Милутина Миланковића налазе се пет рукописа његових предавања на Београдском универзитету. Рукописи припадају библиотеци Математичког института САНУ и део су шире колекције белешки са предавања која су држана крајем XIX и почетком XX века на Београдском универзитету. У овом раду представљамо рукописе Миланковићевих предавања.

Кључне речи: Милутин Миланковић, дигитализација, историја астрономије, базе података

1. УВОД

Током 2012. започели смо пројекат за изградњу дигиталне архиве и дигиталних легата - Интернет презентација значајних српских научника који су радили и стварали у области математичких наука. Наша идеја је да се поред очувања српског научног и културног наслеђа, интернет оријентисаним базама представе на једном месту општој и стручној публици научна дела, али и други документи везани за живот и дело ових стваралаца. Најпотпунија колекција у оквиру ове дигиталне архиве је дигитални легат Милутина Миланковића (1879-1958), великог српског астронома, математичара и грађевинског инжењера. Базе се налазе на адресама: <http://digitalnilegati.matf.bg.ac.rs> и <http://legati.matf.bg.ac.rs/milankovic>.

Обе базе су новијег датума, формиране су отприлике пре две године. Њима је претходила Виртуелна библиотека Математичког факултета у Београду која је постављена пре више од једне деценије. Виртуелна

библиотека, на адреси <http://elibrary.matf.bg.ac.rs>, је највећа база дигитализованих текстова у Србији са отвореним приступом. У тренутку писања овог текста, Виртуелна библиотека садржи преко 3500 дигитализованих књига и неколико важних колекција, укључујући све докторске дисертације из математичких наука које су одбрањене на Математичком факултету и ретке књиге из 18. и 19. века. Једну од колекција чине 24 рукописа универзитетских предавања која датирају с краја XIX и почетка XX века. Рукописи су заправо руком писане белешке са предавања која су држали најпознатији српски математичари и професори тог времена на Београдском универзитету: Димитрије Данић, Коста Стојановић, Михаило Петровић и Милутин Миланковић. Дигиталне копије свих рукописа постављене су у Виртуелну библиотеку. Шири текст о овој колекцији и о томе како су рукописи пронађени у библиотеци Математичког института написали су аутори овог рада, видети Мијајловић и други (2013). Рукописи Миланковићевих предавања о којима овде пишемо такође се налазе у његовом дигиталном легату и дигиталној архиви.

2. МЕХАНИКА У СРБИЈИ ПРЕ ДОЛАСКА МИЛУТИНА МИЛАНКОВИЋА

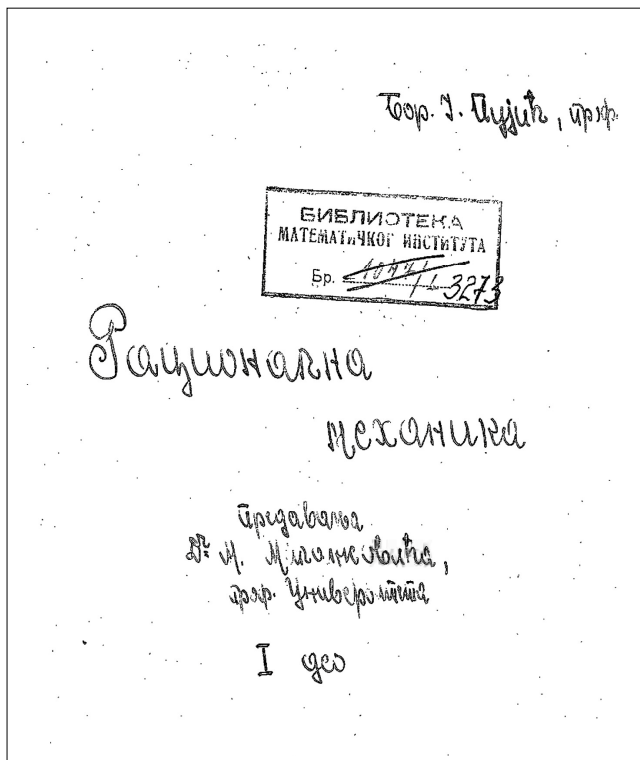
Миланковић је био универзалан научник широког интересовања. Ипак, механика је имала посебно место у његовом научном раду, можда не толико у теоријским основама колико у применама и објашњењима астрономских и планетарних појава. Ово његово интересовање за механику рефлектовало се у бројним универзитетским курсевима које је држао из те области, али и у великом броју његових књига и научних радова који су се дотицали механике. Његовим доласком у Србију, студије механике на Београдском универзитету приближиле су се оним у главним центрима у Европи. Београдски професори механике пре њега фактички нису објављивали научне радове и често су били разапети између науке и неких других активности, политике на пример. Инструктивно је видети статус механике на Београдском универзитету пре Миланковићевог доласка у Београд.

Теоријска механика се изучавала у Србији крајем XIX и почетком XX века једино у Београду, најпре на Великој школи, а затим на Београдском универзитету од оснивања 1905. Први наставник теоријске механике на Великој школи, изабран за професора 1875, био је Љубомир Клерих (1844-1910). Клерих је по образовању био рударски инжењер, па је природно био више наклоњен примењеној механици. Бавио се у оно време популарним математичким машинама и познат је његов изум *тракториографа* помоћу којег се механичким путем могу конструисати трансцедентни бројеви e и π . Споменимо да су се овим аналогним рачунским машинама бавили и други наши математичари тог времена или нешто касније, Михаило Петровић (1868-1943) и Сима Марковић (1888-1939) (видети Трифуновић, 1977, Мијајловић, 2013). Клерих је такође написао уџбеник *Теоријска механика за*

ученике Велике школе у три свеске које су се редом појављивале 1880, 1883 и 1888. Имао је важне функције у Србији тог времена, између осталог био је министар просвете и министар народне привреде. Такође је био члан Српске академије наука.

Професор рационалне механике на Великој школи у периоду 1889-1905 био је Мијалко Ћирић. Мада је скоро две деценије био професор Велике школе и ученик чувеног француског математичара Charles Hermite-a код кога је учио и Михаило Петровић (извор: *Oxford handbook*), Ћирић није оставио запажен траг у науци нити на Великој школи, осим што је написао збирку задатака из диференцијалног рачуна. На тек основаном Београдском универзитету, од 1905 до 1908 на новој катедри за примењену математику механику предаје Коста Стојановић (1867-1921). Поред механике, Коста Стојановић бавио се и математичком економијом. Објавио је једну од најзначајнијих књига у српској стручној литератури из математичке економије. Био је министар народне привреде. Више детаља из историје примењене математике, посебно из астрономије и механике читалац може наћи у Пејовић и Мијајловић (2011).

3. МИЛАНКОВИЋЕВИ РУКОПИСИ



Насловна страница рукописа *Рационална механика I*.

Милутин Миланковић долази на Београдски универзитет 1909. за професора примењене математике на Филозофском факултету по позиву Михаила Петровића и Богдана Гавриловића. Већ његово приступно предавање *Поглед на развитак механике и њен положај према осталим наукама* наговештава његово занимање у следећим деценијама, практично до краја живота. То ће бити механика и њене примене у астрономији где је Миланковић имао достигнућа од највећег светског ранга.

Курс примењене математике који је Миланковић одмах почео да предаје на Београдском универзитету био је веома обиман. Трајао је шест семестра, а недељни фонд износио је шест часова. Списак области на које се курс односио указује нам на велику научну ширину и велико знање Милутина Миланковића. У оквиру курса, Миланковић је предавао векторску анализу,

Проблем брахистохроне

Нека се реши овај проблем: две тачке А и В које не леже у истој вертикали а ни у истој хоризонталној, нека се сајде једном вертициалном кривом тако да мобилна тачка, заволајући своје кретање у положају А са брзином нула, такође прелазући се до тачке В за најкраће време.

Мобилна тачка нека заволајуће своје кретање у положају А. Нека се реши овај проблем: две тачке А и В које не леже у истој вертикали а ни у истој хоризонталној, нека се сајде једном вертициалном кривом тако да мобилна тачка, заволајући своје кретање у положају А са брзином нула, такође прелазући се до тачке В за најкраће време.

Мобилна тачка нека заволајуће своје кретање у положају А. Нека се реши овај проблем: две тачке А и В које не леже у истој вертикали а ни у истој хоризонталној, нека се сајде једном вертициалном кривом тако да мобилна тачка, заволајући своје кретање у положају А са брзином нула, такође прелазући се до тачке В за најкраће време.

на брзина у положају А израчунаће се према теореме живе силе која је овде обрнута

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -mg dx$$

или

$$v^2 = -2g x + C$$

за $x_0 = x$ је $v = 0$ па

$$C = 2g x_0$$

зато је

$$v^2 = 2g(x_0 - x)$$

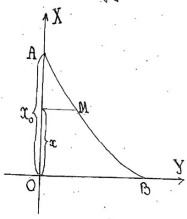
или

$$v = \sqrt{2g} \sqrt{x_0 - x} = \frac{ds}{dt}$$

или

$$t = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{ds}{\sqrt{x_0 - x}}$$

Време што са мобилна тачка треба да у положају А дође у положају В једнако је



Проблем брахистохроне описан у рукопису *Рационална механика I*.

рационалну механику, хидромеханику, општу теорију поља, термодинамику, науку о електрицитету и магнетизму и небеску механику. Из ових предмета касније су се на Београдском универзитету развиле посебне дисциплине, односно студијске групе: рационална механика, небеска механика и теоријска физика. Миланковић је наставио да предаје небеску механику између два светска рата и 1935. године објавио је универзитетски уџбеник из ове области. Друге две области углавном су преузели руски научници који су се доселили у Србију после Октобарске револуције. Тако, Антон Билимовић

је предавао рационалну механику, док је Вјачеслав Жардечки предавао теоријску физику.

Миланковићева универзитетска предавања су записана у пет рукописа и сачувана су у библиотеци Математичког института САНУ. Рукописи су написани до Првог светског рата, тј. у периоду 1910-1914. На првој страни сваког рукописа у горњем десном углу пише "Бор. Ј. Пујић, проф". Поређењем са белешкама других предавања, можемо закључити да је белешке свих Миланковићевих предавања написао студент математике Боривој Ј. Пујић. О Пујићу не знамо много, нити има некох трагова о њему у документима који су нама били доступни, осим у архиви Математичког факултета. Тамо је Пујић као студент евидентиран под бројем 3236/1914, што значи да је започео студије пред Први светски рат и да је по свој прилици касније био гимназијски професор математике. Рукописи су заведени у библиотеци Математичког института САНУ шездесетих година прошлог века и можемо претпоставити да је рукописе Институту поклонио сам Пујић. Рукописи представљају такође добро сведочанство за терминологију која се користила у то време у механици.

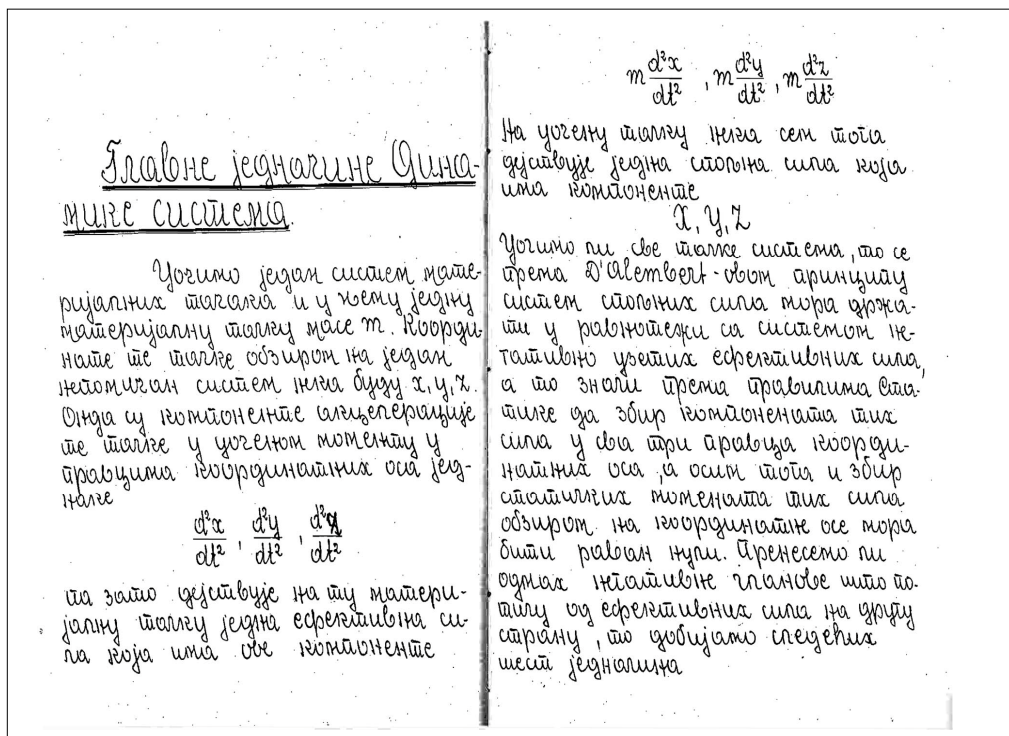
Мислимо да су рукописи и околности које су пратиле њихов настанак слабо познати не само широј јавности већ и стручним круговима. Зато смо се одлучили да у овој прилици рукописе представимо нешто детаљније.

4. РУКОПИС ИЗ РАЦИОНАЛНЕ МЕХАНИКЕ

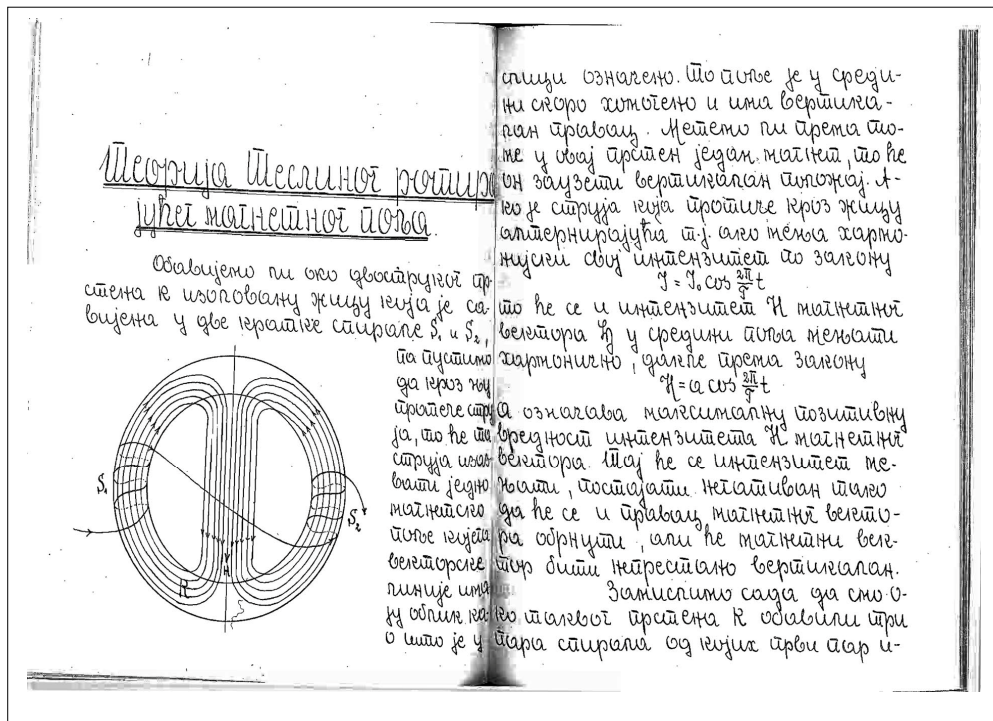
Овај рукопис састоји се из два дела. У првом делу, *Рационалној механици* I, представљене су кинематика, статика и динамика материјалне тачке. У првом поглављу изложени су елементи векторског рачуна који ће потом у излагању механике послужити као математичка основа. Излагање је аксиоматске природе, тако да се вероватно први пут у српској математичкој литератури спомињу алгебарски термини као што су асоцијативни, комутативни и дистрибутивни закони. Колико нам је познато, ове појмове срећемо поново у српској математичкој литератури тек код Јована Карамате у његовој књизи *Комплексан број* која је објављена тридесет година касније, одмах после Другог светског рата. Полазећи од поменутих основа, у оквиру поглавља *Кинематика* Миланковић уводи појмове вектора брзине и вектора акцелерације (убрзања). Треба споменути да је векторска анализа у то време и у свету представљала напредан математички апарат у излагању механике. Миланковић је заправо увео овај метод у српску научну и уџбеничку литературу. У поглављу *Статика* Миланковић излаже услове за равнотежу материјалне тачке везану за површ или криву. Теоријска излагања допуњена су примерима и цртежима. Најобимније је треће поглавље, *Динамика*. Доследно се држећи векторског приступа, на почетку се уводи вектор *квантитативног* кретања (количине кретања). Не улазећи у детаље, споменимо да се овде такође дају једначине кретања косог хица, као и

кретање материјалне тачке на ротационој површини. Овај рукопис има 380 страница текста писаног руком.

У другом делу, *Рационална механика II*, излажу се следеће области: Статика материјалне линије и крутих тела и Динамика крутог тела. Под материјалном линијом, аутор подразумева систем материјалних тачака поређаних на некој кривој од којих је свака у интеракцији са суседним тачкама. Дејство суседних тачака Миланковић назива *интерним* (унутрашњим) силама. У поглављу *Статика крутог тела* за силе отпора ослонца наводи пример мостова, што је сасвим разумљиво у светлу чињенице да је Миланковић у Бечу завршио студије за грађевинског инжењера и тамо одбранио докторат из ове области. По доласку у Србији пројектовао је неколико десетина грађевинских објеката, па и неколико мостова. У поглављу *Динамика крутог тела* између осталог Миланковић пише о моменту инерције, моментима девијације, елипсоиду инерције, транслаторном кретању, ротационом кретању крутог тела. Такође изводи главне једначине динамике система и даје мноштво примера сложеног кретања крутог тела. Овај рукопис има 376 страница текста писаног руком.



Рукопис *Рационална механика II*: Једначине динамичких система.



Рукопис *Модерне теорије електрицитета и магнетизма*: Објашњење Теслиног ротирајућег магнетног поља.

5. РУКОПИС ИЗ МОДЕРНЕ ТЕОРИЈЕ ЕЛЕКТРИЦИТЕТА И МАГНЕТИЗМА

Читањем овог рукописа можемо се уверити да су предавања из овог предмета била на високом нивоу, равна оним у најбољим универзитетским центрима у свету почетком двадесетог века. У њима су била укључена најновија сазнања и открића из науке о електрицитету и магнетизму. Део рукописа посвећен је проналасцима и изумима нашег великана Николе Тесле. Тако, представљена је теорија Теслиних наизменичних струја, затим Теслино ротирајуће магнетно поље и објашњење рада Теслиног мотора. Од других важних тема, представљена је Максвелова електромагнетна теорија светлости и теорија електрона. У излагању Миланковић користи високи математички апарат, између осталог елементе диференцијалне геометрије, односно векторског диференцијалног рачуна (операторе rot , div и grad). Захваљујући примени овог математичког апарата, извођења и једначине које описују ове физичке феномене имају компактан и концизан облик.

Рукопис садржи шест поглавља са следећим називима: *Електростатика*, *Теорија магнетизма*, *Електрична струја* и *њено магнетно поље*, *Индукција*,

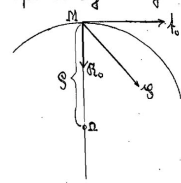
О електричним осцилацијама и таласима и Теорија електрона. Рукопис има 366 страница руком исписаног текста.

6. РУКОПИС ВЕКТОРСКА АНАЛИЗА СА ПРИМЕНАМА ИЗ ТЕОРИСКЕ ФИЗИКЕ

По начину излагања и високом степену ригорозности овај рукопис је математичког карактера и показује да је Миланковић такође био одличан математичар. У првом делу рукописа, отприлике у првих сто страна, излаже се елементарна теорија геометријских вектора. Данас би тај садржај описали као теорију тродимензионог еуклидског простора. Поред основног рачуна са векторима и скаларима, изведене су особине скаларног, векторског и мешовитог производа вектора. У остатку рукописа излаже се векторска анализа са применама у механици и у том делу доста се преклапа са рукопиом *Рационална механика I*. Изучавају се особине векторских функција где се независна реална променљива интерпретира као време и развија се диференцијални рачун над њима. Истовремено се даје природна физичка интерпретација за уведене математичке појмове. Тако се уз изводе векторских функција одмах уводе вектори брзине и убрзања материјалне

Неке примене Векторске Анализе
у Рационалној Механици

Тангентцијална и нормална акцелерација. Обицне ли једна мобилна тачка једну криву у тачку M , па налази ли се у времену t у тачки M , то је вектор брзине ордине у том времену представљен са $v = v \tau_0$ где v означава скаларну величину брзине а τ_0 је јединични вектор у правцу тангенте. Из две једнакости следи диференцијацијом $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \tau_0 + v \frac{d\tau_0}{dt} = \frac{dv}{dt} \tau_0 + v \frac{d\tau_0}{ds} \frac{ds}{dt}$



где ds означаје скаларни елементарни аџа. Знамо да је $\frac{ds}{dt} = v$ и $\frac{d\tau_0}{ds} = \frac{\tau_s}{\rho_s}$ где ρ_s означаје радиус кривине са јединични вектор у правцу оства радиуса. Зато је $v = \frac{dv}{dt} \tau_0 + \frac{v^2}{\rho_s} \tau_s$

Акцелерацију $\frac{dv}{dt}$ разлажемо у два компонента: једна од њих има правцу τ_0 а једна у правцу тангенте; њен интензитет је $\rho_s = \frac{dv}{dt}$

Друга компонента тада у правцу главне радиуса кривине и има интензитет $\rho_s = \frac{v^2}{\rho_s}$

Прву компоненту зовемо тангентцијалном акцелерацијом мобилне тачке, а другу нормалном или центрифугалном акцелерацијом мобилне тачке јер је намерена према

Рукопис *Векторска анализа са применама из теориске физике*: Примене векторске анализе у рационалној механици.

пожним поњима можемо обавно да формишемо: Један вртложни поњау састоји се од свих осталих материјалних честица; он тежи свој тлопожај и свој облик, али му се материјални састав не мења. Све материјалне честице ротирају око моменталних сва ротације које кантирају вртложну линију. Величина све ротације проториционална је одстојаноу од сваког материјалних честица а инверзионална проториционалношћу независан је од времена.

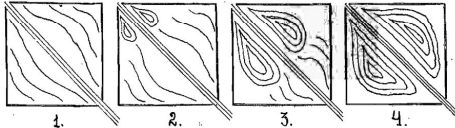
Продукат: ωdr који је на свима пресецима једног вртложног поњау једнак, можемо обавно трансформисати: вектор dr може бити и по срези а може бити и производна по вршина, само онда морамо писати $\int \omega dr$. Како је

$\int \omega dr = \int \omega r dr$, то средњи интеграл по Стојес-овој шекрети можемо затениши интегралити

$$\int \omega r dr = \int \omega dr$$

где \int означава контуру пресека. Ова једнакоста казује да је циркуларизација брзине ω дуж једне произвољне линије која о-бухваља вртложну поњау и која је затворена једнака за све произвољне шале-ве линије.

Експерименти Виедлар-Риске-ови
 Кроз квадратични суд пушта се течност да протече дијаметрално и примећује се



постепено стај притисак. Троне силе сред-ставају различите фазе свих протичања. У првој фази је притисак који шек-

Рукопис *Општа теорија физикалних поља*: Опис вртложног кретања течности.

тачке, а потом и силе. Поред диференцирања по времену Миланковић уводи и диференцирање по луку, што му омогућава да уведе основне појмове диференцијалне геометрије као што је кривина и полупречник кривине код просторне кривуље. Све то на крају примењује на кретање крутог тела. Нарочито је занимљиво поглавље које се бави векторским и скаларним пољима. У том контексту уводи Хамилтонов набла оператор и на сасвим модеран начин заснива фундаменталне операторе векторске анализе, rot , div и grad . Поред особина ових оператора такође изводи основне теореме векторске анализе као што су Гаусова теорема (теорема о дивергенцији, позната и као теорема Остроградског) и Стоксова теорема. Рукопис има 254 страница текста писаног руком.

7. РУКОПИС ОПШТА ТЕОРИЈА ФИЗИКАЛНИХ ПОЉА

Овај рукопис су белешке са курса завидног нивоа, теоријске (математичке) физике. Прва половина рукописа посвећена је математичким основама које и у овом случају леже на апарату векторске анализе.

Миланковић најпре дефинише скаларна и векторска поља као физичке величине које у свакој тачки простора имају неку вредност. Та вредност је скаларног, односно векторског типа, већ у зависности од врсте поља. Полазећи од могућих вредности векторских оператора rot , div и grad , поља се класификују на безвртложна, потенцијална, ламерална, безизворна, соленоидна и Лапласова. Свако од ових поља изучава се у оквиру посебног одељка. Миланковић тамо изводи Гаусову теорему о потенцијалу, мада не спомиње њен назив. У другом делу рукописа примењује уведени математички апарат у објашњењу физичких феномена у термодинамици, хидродинамици и динамици система материјалних тачака. Тако, у оквиру термодинамике изводи једначине провођења топлоте кроз штап, жицу и плочу. У делу из хидродинамике изводи Ојлерове и Лангражове једначине хидродинамике. У делу из динамике система материјалних тачака изводи, на пример, Бернулијеву теорему о стационарним стањима коју потом користи у извођењу Торичелијеве теореме која описује истицање течности из резервоара. Можемо приметити да курс записан у овим белешкама претпоставља добро познавање апарата векторске анализе. Овај рукопис има 298 страница текста исписаног руком.

8. ЗАКЉУЧАК

Белешке са Миланковићевих предавања представљају значајно сведочанство о статусу механике и теоријске физике на Београдском универзитету пред Први светски рат. Прочитавањем ових рукописа сазнајемо да је Миланковић поставио темеље модерних универзитетских предавања у Србији у овим наукама, затим да је у излагању ових дисциплина користио онда врло напредан математички апарат који је највећим делом био смештен у оквиру векторске анализе и диференцијалне геометрије. Ови списи такође сведоче о Миланковићевој научној универзалности, али и да је био одличан математичар. Имао је тачно 30 година када се преселио у Београд 1909, стога ови рукописи могу имати значајно место у изучавању Миланковићевог научног стваралаштва, нарочито у његовим раним тридесетим годинама.

Свих пет рукописа Миланковићевих предавања налазе се на адреси:

<http://legati.matf.bg.ac.rs/milankovic/books.waf1?c=predavanja>

Овај чланак је настао као резултат рада на Пројекту III 44006 који финансира Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

Литература

- Mijajlović, Ž.: 2013, „Doctoral Dissertation of Sima Marković“, in: Social, political and scientific thought and activity of Sima Marković, SASA, 207-216.
- Mijajlović, Ž., Mitić, N., Malkov, S.: 2013, „Digital Legacies“, *NCD Review*, **22**, 148-152.
- Pejović, N., Mijajlović, Ž.: 2011, „Early astronomical heritage in Virtual library of Faculty of mathematics in Belgrade“, *NCD Review*, **19**, 11-25.

- Pejović, N., Mijajlović, Ž.: 2014, „Twenty four manuscripts in the Virtual library of the Faculty of mathematics in Belgrade“, *NCD Review*, **25**, 29-35.
- Robson, Eleanor; Stedall, Jacqueline; eds.: 2009, *The Oxford handbook of the history of mathematics*, Oxford Univ. Press.
- Stokić, Zoran: 2013, *150 godina tehničkih nauka i kritičke tradicije u Srbiji*, ауторски текст на Интернет страници <http://vioti11.blogspot.com/2013/12/150-godina-tehnickih-nauka-i-kriticke.html>.
- Trifunović, Miodrag (Dragan): 1977, Proučavanje modelovanja u delu Mihaila Petrovića, Doktorska disertacija, PMF, Univ. u Novom Sadu.
- Vukša-Popović, N., Mijajlović, Ž., Mitić, N., Malkov, S.: 2014, „Digital archive repository for digital legacies“, *NCD Review*, **24**, 24-28

MANUSCRIPTS OF THE FIRST UNIVERSITY LECTURES OF MILUTIN MILANKOVIĆ

In the rich scientific and professional legacy of Milutin Milankovića there are five manuscripts of his lectures at the University of Belgrade. Manuscripts belong to the library of the Mathematical Institute of Serbian Academy of Sciences and Arts and are part of a wider collection of notes from lectures, which were held in late nineteenth and early twentieth century, on the University of Belgrade. In this paper we present the manuscripts of Milanković lectures.

Key words: Milutin Milanković, digitization, History of Astronomy, Databases